

可压升力面理论桨扇气动设计反问题方法

周亦成, 单 鹏

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191)

摘 要: 结合桨扇几何与流动特征讨论了其两大类设计方法的特点, 研究了基于可压升力面理论的一种桨扇气动设计反问题方法. 相比于传统螺旋桨升力面设计方法, 其在旋转坐标系中小扰动线性化假设下严格处理了桨叶旋转、流动压缩性、宽弦大后掠桨叶和桨叶间相互作用, 体现了桨扇有轮毂而无机匣的特征. 给出了桨扇设计中载荷-下洗角、厚度-下洗角核函数表达式, 与机翼核函数的对比验证了其准确性, 给出了其在升力面弦向积分和展向积分中的处理方式. 讨论了反问题中各设计分布参数的给定方式, 特别是最佳载荷分布的给定. 构造了一种修正反问题设计中流动损失影响的损失模型, 给出了设计算例, 数值分析了该设计方法的准确性. 研究表明, 在跨声速区, 反问题给定的弦向载荷分布与数值模拟的存在一定差异, 这主要由该设计方法线性化假设与跨声速流动非线性的差别造成. 反问题得出的基元功率系数分布、总体性能参数与数值模拟的吻合较好.

关 键 词: 桨扇; 设计反问题; 可压升力面理论; 核函数; 最佳载荷分布

中图分类号: V211.6

文献标志码: A

Inverse design approach for propfan aerodynamics based on compressible lifting surface theory

ZHOU Yicheng, SHAN Peng

(School of Energy and Power Engineering,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Two kinds of design methodologies of propfan were briefly discussed combined with its structure and flow features. Based on the compressible lifting surface theory, an inverse approach for propfan aerodynamics design was developed. Compared with the traditional lifting surface design method of propeller, the effects of blade rotation, compressibility, long chord length, large sweep angle and blade interference were treated strictly under the small distribution linearization assumption in rotating coordinate system. The features of the profan with hub but without casing were reflected. The kernel functions of loading-downwash angle and thickness-downwash angle for propfan design were given. The kernel functions were verified by comparing with the wing kernel functions and their convergences were studied. The chordwise and spanwise integrals of the kernel functions were discussed in detail. The ways of prescribing the distributions of design parameters, especially the optimum loading distribution, were discussed. A loss model to modify the effect of flow loss on inverse design was made. A design example was given and the accuracy of this inverse design approach was analyzed. Studies show, at some transonic sections, the pre-

收稿日期: 2015-09-14

作者简介: 周亦成(1986—), 男, 博士生, 主要从事发动机总体数学模型研究, 压气机、桨扇气动设计. E-mail: zhouyc@buaa.edu.cn

引用格式: 周亦成, 单鹏. 可压升力面理论桨扇气动设计反问题方法[J]. 航空动力学报, 2017, 32(6): 1456-1469. ZHOU Yicheng, SHAN Peng. Inverse design approach for propfan aerodynamics based on compressible lifting surface theory[J]. Journal of Aerospace Power, 2017, 32(6): 1456-1469.

scribed chordwise loading distributions have some differences from those of numerical simulation of the designed blade due to the linearization assumption differing from the real flow nature. The prescribed element power coefficient distribution and the overall performance agree well with the numerical simulation.

Key words: propfan; inverse design approach; compressible lifting surface theory; kernel function; optimum loading distribution

桨扇发动机可兼具螺旋桨发动机的高推进效率和涡扇发动机的较高巡航马赫数的特点. 桨扇的几何特征和流动特点均介于螺旋桨和风扇推进器之间. 相比于风扇,其取消了外机匣,桨盘单位面积载荷小,叶片少. 相比于螺旋桨,其桨叶展弦比小,后掠角大. 从流动特点看,桨扇除桨根外桨叶稠度稀,桨盘处气流周向平均流动与绕桨叶附近的流动差别大,相比于叶栅通道中流动,其更接近孤立翼的诱导流动. 同时,由于无机匣限制,桨尖附近存在大区域的流向涡,流线复杂. 这些特点均与螺旋桨的相同. 另一方面,高巡航马赫数的桨扇,相对来流马赫数从桨根的亚声速变化到桨尖的超声速,是典型的跨声速流动,这与现代风扇的流动相同.

根据桨扇的流动特点,其气动设计方法可大致分为两类. 一类是把风扇、压气机叶片设计的内流方法推广到桨扇设计中. Smith^[1] 首先尝试把流线曲率法应用于桨扇设计. 对于桨扇无外机匣的流动特征,其通过在径向平衡方程中添加一个反映桨尖绕流的径向压力梯度项来反映该特征. 同时,由于桨叶稠度过稀,平均 S_2 流面与桨叶中弧面流动的差异大,加上由于桨尖绕流产生的复杂流线,其通过采用多个反映不同流动现象的模型来修正气流脱轨角从而得到桨叶中弧面. Mileschin 等^[2] 把基于 CFD 和壁面特殊的边界条件处理的叶轮机黏性全三维反问题设计技术应用用于桨扇的气动设计,设计中指定桨叶表面静压分布来求解桨叶造型.

另一类是把传统的螺旋桨设计的外流方法推广应用于桨扇设计,例如片条理论、升力线法、升力面法等. 这些方法在低速螺旋桨设计中应用广泛^[3-4],但均是基于固定坐标系中的不可压流动模型建立. 对于跨声速桨扇,Rohrbach^[5] 描述了一个分段设计方法,其在桨根附近桨叶稠度大的径向部分使用内流叶片的设计方法,而在其他径向部分则用传统的螺旋桨设计方法,空气压缩性的影响则通过叶型实验数据来考虑.

对于跨声速流动特点的桨扇,目前大部分研

究是基于可压缩流的小扰动线性化假设的速度势或加速度势方法,这类方法在小扰动线性化假设下,严格处理了空气压缩性、宽弦大后掠桨叶,桨叶间相互作用等影响,不存在传统低速螺旋桨方法应用到高速螺旋桨时的压缩性修正问题. 这方面研究主要是关于桨扇噪声预测和气动性能计算^[6-11],对于桨扇气动反问题设计的研究却鲜见报道. 值得注意的是,对于是内流设计方法还是外流方法哪一类更适用于桨扇气动设计,从已发表的文献看还没有达成一致.

本文使用旋转坐标系下、可压缩流、定常小扰动线性化压力方程,把涵道叶轮机的可压升力面理论^[12] 推广应用于无涵道桨扇的气动设计. 给出了桨扇设计问题中载荷-下洗角、厚度-下洗角核函数表达式,通过渐进展开方式处理了其计算量大的问题,与机翼核函数对比验证了其正确性,给出了其弦向积分中关于弦向位置敏感和展向积分中奇异性的处理方式. 讨论了反问题中各设计分布参数的给定方式,构造了一种修正反问题设计中流动损失影响的损失模型. 给出了巡航马赫数为 0.8 的设计算例,并通过数值模拟方式分析了该设计方法的准确性.

1 桨扇可压升力面理论

本文桨扇气动设计方法中控制方程的建立是基于无黏性、可压缩流动的小扰动线性化假设,该假设应用于桨扇巡航点气动设计时的合理性有以下讨论. 对于黏性影响,认为桨扇高速巡航工况中流动雷诺数高,流场中黏性的作用区域主要集中在桨叶和轮毂表面很薄的边界层中,而在边界层之外的主流区域中黏性作用很小. 对于小扰动假设,类似于高速机翼理论中,认为巡航时桨叶引起的相对来流参数的变化量比相对来流参数本身小得多. 对于线性化简化,巡航时一般攻角较小,后掠桨叶的前缘涡强度弱或没有,前缘涡引起的非线性现象弱,同时认为巡航时激波一般较弱,激波的存在与小扰动线性化假设的偏离较小^[12-13]. 对

于跨声速时线性化失效问题, Hanson^[6] 表明桨扇问题满足三维跨声速流动的小扰动线性化准则. 关于轮毂形状的影响, 变半径的轮毂会引起来流速度的变化, 同时由于桨叶的扭转, 会引起垂直于螺旋面的下洗速度. 完善的升力面方法应考虑该影响, 本文暂采用直筒型轮毂故没有该影响.

1.1 桨扇设计问题中载荷-下洗角、厚度-下洗角核函数

本文将旋转坐标系固定在桨叶上, 随桨叶一起以角速度 ω 绕 z 轴正方向旋转, 同时随桨叶以飞行速度 U 前进(图 1). 该旋转坐标系中, 可压缩流、定常、小扰动压力满足式(1)的线性偏微分方程

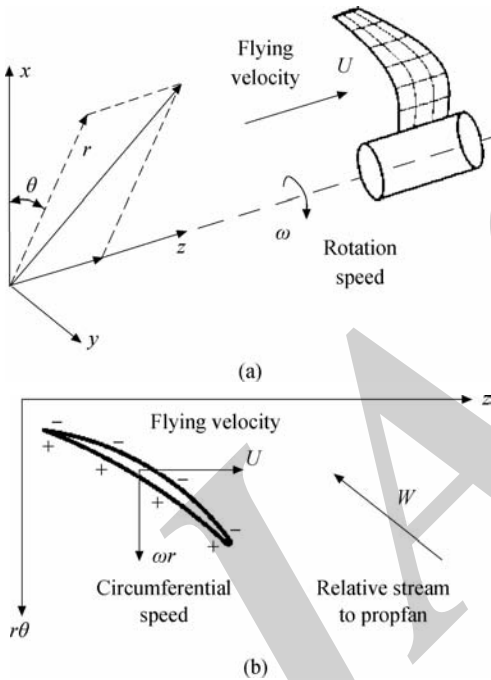


图 1 旋转坐标系示意图

Fig.1 Schematic diagram of the rotating coordinate system

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} (1 - Ma^2 \omega^2 r^2) \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + (1 - Ma^2) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - 2Ma^2 \omega \frac{\partial^2 p}{\partial \theta \partial z} = 0 \quad (1)$$

式中 r, z 和 ω 为径向坐标、轴向坐标和角速度的无量纲量, 分别定义为 $r = (r/r_t)_{\text{dim}}$, $z = (z/r_t)_{\text{dim}}$ 和 $\omega = (\omega r_t/U)_{\text{dim}}$, r_t 为桨尖处半径, 下标 dim 表示有量纲量. θ 为周向坐标, Ma 为飞行马赫数. p 为桨扇引起的扰动压力. 对于图 1 所示桨扇模型的流动特征, 轮毂半径处扰动速度的径向分量 w_r 为 0, 而无穷远半径处扰动压力为 0, 由径向压力平衡方程 $\partial p / \partial r = \rho_0 U \sqrt{1 + \omega^2 r^2} (\partial w_r / \partial r)$ 可得式(1)的边界条件为

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, r = r_h; p \rightarrow 0, r \rightarrow +\infty \quad (2)$$

满足边界条件的微分方程基本解 $G(r, \theta, z | \rho, \varphi, \zeta)$ 为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r^2} (1 - Ma^2 \omega^2 r^2) \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} + (1 - Ma^2) \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} - 2Ma^2 \omega \frac{\partial^2 G}{\partial \theta \partial z} = \\ \frac{1}{r} \delta(r - \rho) \delta(\theta - \varphi) \delta(z - \zeta) \\ \frac{\partial G}{\partial r} = 0, r = r_h; G \rightarrow 0, r \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (3)$$

式中 (r, θ, z) 和 (ρ, φ, ζ) 分别为场点和源点坐标; r_h 表示轮毂处半径值, ρ_0 为远前方未受扰动来流密度.

应指出, 本文 G 为半有界空间中的基本解, 和自由空间格林函数不同, 它反映了桨扇的有轮毂而无外机匣的几何特征. 本文采用与文献[12]相同的方法, 通过 G 的 Fourier 变换和本征函数展开法, 得到了由双重级数表达的基本解 G 的表达式. 对于 N 个桨叶情况中的基本解 G_c 可由周向均布的 N 个 G 叠加得到. 亚声速飞行时, G_c 的表达式见附录 A 式(A1), 其中 ν 和 n 是 Fourier 变换留下的周向波数, l 是本征函数展开的序列号, (r, θ, z) 和 (ρ, φ, ζ) 各为场点和源点的坐标. 表达式中 $k_l^{(n)}$ 和 $R_l^{(n)}(r)$ 为如下本征值问题的本征值和归一化本征函数

$$\begin{cases} \left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} + \left[(k_l^{(n)})^2 - \frac{n^2}{r^2} \right] \right\} R_l^{(n)}(r) = 0 \\ \frac{d}{dr} R_l^{(n)}(r) = 0, r = r_h, \\ R_l^{(n)}(r) \rightarrow 0, r \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (4)$$

式中无穷远半径边界条件的处理是本文把涵道叶轮机升力面理论^[12]推广到桨扇问题的重要点. 本文设想其相当于一个远大于桨尖半径位置即 r_∞ 处的边界条件, 例如 $R_l^{(n)}(r_\infty) = 0$ 或 $dR_l^{(n)}(r_\infty)/dr = 0$, 该处理方式相当于式(2)中无穷远处边界条件改为 $p(r_\infty, \theta, z) = 0$ 或 $w_r(r_\infty, \theta, z) = 0$. 本文采用 $dR_l^{(n)}(r_\infty)/dr = 0$ 的处理方式, 其对应的流动模型相当于给无涵道桨扇安装了一远大于其直径的外机匣. 值得注意的是, 这种处理对于桨扇噪声问题应不适合, 但对桨扇气动性能问题影响应很小.

式(A2)中轴向特征值 $\Omega_l^{(n)}$ 中对应于条件

$(k_l^{(n)})^2 - Ma^2 \omega^2 n^2 / \beta^2$ 大于 0 和小于 0 的两种模态,分别对应于基本解 G_c 的轴向衰减模态和轴向非衰减模态.值得注意的是涵道叶轮机升力面理论^[12]和本文桨扇问题中,轴向特征值的两种模态对应的流动情形有所不同,分析如下.定义修正特征值 $\kappa_l^{(n)} = k_l^{(n)} / n$,根据 Bessel 函数性质有 $\kappa_l^{(n)} > \kappa_1^{(n)} \approx 1/r_\infty$,则

$$\begin{aligned} (k_l^{(n)})^2 - \frac{Ma^2 \omega^2 n^2}{\beta^2} = \\ n^2 \left\{ \left[(\kappa_l^{(n)})^2 - \frac{1}{r_\infty^2} \right] + \left(\frac{1}{r_\infty^2} - 1 \right) + \frac{1 - Ma_{t,rel}^2}{1 - Ma^2} \right\} \approx \\ n^2 \left\{ \left[(\kappa_l^{(n)})^2 - \frac{1}{r_\infty^2} \right] - \frac{Ma_{t,rel}^2 - Ma^2}{1 - Ma^2} \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

式中 $Ma_{t,rel}$ 为桨尖处相对来流马赫数, $\beta = \sqrt{1 - Ma^2}$. 在涵道叶轮机问题中 $r_\infty = 1$,可知基本解的轴向非衰减模态只存在于叶尖相对流动超声速的情况中,而在桨扇问题中,无论桨尖相对流动是否超声速均存在该模态.这说明由于没有外机匣的限制,源点能对场点产生影响的模态的数量大大增加.上述表明,本文桨扇问题中随 r_∞ 取值的增大,轴向非衰减模态的数量迅速增加,计算量迅速增加.本文取 $r_\infty = 20r_t$,计算表明,此时核函数受 r_∞ 影响已非常小.

桨叶载荷和厚度对流场的作用分别通过分布在螺旋面上的压力偶极子和点源来代替.压力偶极子在流场中诱导的下洗速度 $w_{n,1}$ 可根据动量方程沿远前方流体微团的相对流线积分得到

$$w_{n,1}(r, \theta, z) = \frac{-1}{\rho_0 U \sqrt{1 + \omega^2 r^2}} \cdot \int_{+\infty}^z \left(\frac{\partial}{r \partial \theta} - \omega r \frac{\partial}{\partial z} \right) p(r, \theta, z) \Big|_{\theta=\theta_0+\omega z} dz \quad (6)$$

式中 θ_0 为场点与螺旋面 $\theta = \omega z$ 间的周向夹角,而扰动压力 p 可以通过格林函数法得到

$$p(r, \theta, z) = \iint_S \Delta p(\rho, \zeta) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \rho^2}} \cdot \left(\frac{\partial}{\rho \partial \varphi} - \omega \rho \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) G_c(r, \theta, z | \rho, \varphi, \zeta) \Big|_{\varphi=\omega \zeta} dS \quad (7)$$

式中 Δp 为螺旋面两侧压力差, S 表示升力面.

定义载荷系数 $\Delta C_p = \Delta p / [\frac{1}{2} \rho_0 U^2 (1 + \omega^2 \rho^2)]$, 下洗角 $\alpha = w_n / (U \sqrt{1 + \omega^2 r^2})$, 则可得到由桨叶载荷分布诱导的下洗角的积分方程

$$\alpha_l(r, \theta, z) = \iint_S \Delta C_p(\rho, \zeta) K_l(r, \theta, z | \rho, \zeta) dS \quad (8)$$

其中 $K_l(r, \theta, z | \rho, \zeta)$ 为载荷-下洗角核函数,其表达式见附录 B.

对于叶片厚度的作用,在机翼问题中,由于分布在机翼平面上的点源在机翼平面上诱导的下洗速度为零,故在分析载荷分布问题中不用考虑其影响.而在螺旋桨问题中,由于桨叶的径向扭曲和桨叶间的相互作用,则应考虑厚度的影响.点源在流场中诱导的下洗速度 $w_{n,1}$ 可由扰动速度势 Φ 沿螺旋面法向导数得到

$$w_{n,1}(r, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 r^2}} \cdot \left(\frac{\partial}{r \partial \theta} - \omega r \frac{\partial}{\partial z} \right) \Phi(r, \theta, z) \Big|_{\theta=\theta_0+\omega z} \quad (9)$$

Φ 与扰动压力满足同样形式的微分方程,它们的基本解形式相同,通过格林函数法有

$$\Phi(r, \theta, z) = \iint_S Q(\rho, \zeta) G_c(r, \theta, z | \rho, \varphi, \zeta) \Big|_{\varphi=\omega \zeta} dS \quad (10)$$

式中 $Q(\rho, \zeta)$ 为体现桨叶厚度影响的源项,和机翼理论中类似^[14],有 $Q(\rho, \zeta) = 2U \sqrt{1 + \omega^2 \rho^2} \cdot S_u(\rho, \zeta)$, 其中 $S_u(\rho, \zeta)$ 为桨叶当地厚度分布沿弦向导数的一半.桨叶厚度分布诱导的下洗角的积分方程为

$$\alpha_t(r, \theta, z) = \iint_S S_u(\rho, \zeta) K_t(r, \theta, z | \rho, \zeta) dS \quad (11)$$

其中 α_t 为下洗角 α 中由厚度诱导的部分; $K_t(r, \theta, z | \rho, \zeta)$ 为厚度-下洗角核函数,表达式见附录 B.

1.2 核函数的收敛性及其与机翼核函数的比较

关于上述两个核函数的收敛性,这里先分析它们关于序列 l 的收敛性.对于厚度-下洗角核函数 K_t 以及载荷-下洗角核函数 K_l 中的 $K_{2,1}, K_{3,1}$ 和 $K_{4,1}$ 部分,由 $\kappa_l^{(n)}$ 的曲线可知(图 2),它们在小 l 数时为轴向非衰减模态,而 l 大于某一值时转变为轴向衰减模态,由轴向衰减中 $\exp(-n \cdot \hat{\Omega}_l^{(n)} |z - \zeta|)$ 项的性质可知它们关于 l 迅速收敛.对于载荷-下洗角核函数中的 $K_{1,1}$ 部分,式(B2)显示其不存在上述两种模态,式(B8)中 $1/[\omega^2 + (\kappa_l^{(n)})^2]$ 项的性质说明 $K_{1,1}$ 关于 l 的收敛速度远小于 $K_{2,1}, K_{3,1}$ 和 $K_{4,1}$,其计算量远大于其他部分.本文为减少计算量, $K_{1,1}$ 在大 l 数下采用渐进展开的方式计算,其特征值和特征函数的渐进展开表达式可根据 Bessel 函数的性质得到

$$\begin{cases} \kappa_l^{(n)} = \frac{k_l^{(n)}}{n} \Rightarrow \frac{l\pi}{n(r_\infty - r_h)} \\ R_l^{(n)}(r) \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{r(r_\infty - r_h)}} \cos[k_l^{(n)}(r - r_h)] \end{cases} \quad (12)$$

值得说明的是,在 $K_{1,l}$ 的非零情况中(源点处于场点的上流,即 $\zeta > z$),其值与飞行马赫数和流向位置无关,同时计算表明,其在 $r \rightarrow \rho$ 时存在 2 阶奇异性,体现为 $r = \rho$ 时双重级数趋于无穷大不收敛.这些性质表明 $K_{1,l}$ 可类比于机翼核函数 $k_{1,\text{wing}}$

$$K_{1,\text{wing}} = \begin{cases} \frac{1}{8\pi(r-\rho)^2} \left[1 + \frac{z-\zeta}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + (1-Ma^2)(r-\rho)^2}} \right], & (z-\zeta)^2 + (1-Ma^2)(r-\rho)^2 > 0 \\ 0, & (z-\zeta)^2 + (1-Ma^2)(r-\rho)^2 < 0 \end{cases}$$

(13)

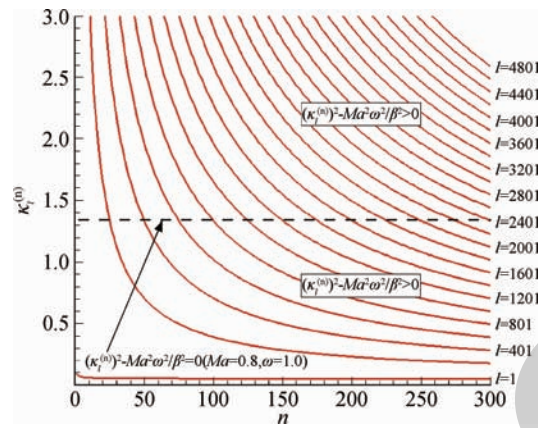


图 2 修正特征值 $\kappa_l^{(n)}$ ($r_h = 0.232, r_\infty = 20.0$)

Fig. 2 Modified eigenvalue $\kappa_l^{(n)}$ ($r_h = 0.232, r_\infty = 20.0$)

图 3 中实线的上、下方分别为飞行马赫数下核函数中轴向衰减模态和非衰减模态对应的 $n-l$ 范围,虚线的上、下方分别为诸径向位置处特征函数值有限和趋于 0(小于 1.0×10^{-5})所对应的 $n-l$ 范围.核函数关于波数 n 的收敛性,从图 3 可看到,在小飞行马赫数情况和大飞行马赫数、小径向位置情况中,核函数的轴向非衰减模态对应的 $n-l$ 范围包含在特征函数趋于 0 的范围内,这类情况中核函数关于 n 迅速收敛.而在大来流马赫数、大径向位置情况中,核函数受其轴向非衰减模态中 $\cos\{n[\omega(z-\zeta)/\beta^2 + \text{sgn}(\omega)\hat{\Omega}_l^{(n)}|z-\zeta|]\}$ 项的影响,其值随 n 快速振荡.计算表明,该情况可出现在相对来流超声速的截面上,此时核函数的值对场点或源点的流向位置异常敏感,类似的现象在文献[13]中也曾提到.

值得注意的是,本文桨扇问题中核函数的计算量要远大于压气机问题中的.一方面由于桨扇桨叶数 N 远小于压气机的,而核函数双重级数中 n 序列的计算量反比于叶片数.另一方面,按照本文处理方法,桨扇问题中核函数的轴向非衰减模态对应的 $n-l$ 范围远大于压气机问题中的,这也使得尤其是大飞行马赫数的桨扇问题中核函数收敛更难.

式(13)中的第 1 项 $\frac{1}{8}\pi(r-\rho)^2$.本文中奇异点附近的 $K_{1,l}$ 是通过插值的方式计算其去除 2 阶奇异性后的部分.

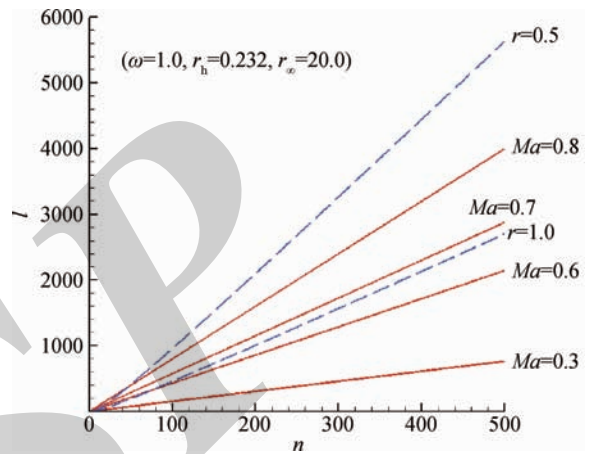


图 3 核函数轴向衰减模态和轴向非衰减模态、特征函数值有限和趋于 0 时的 $n-l$ 范围

Fig. 3 $n-l$ divisions of axial decay and non-axial decay modes of kernel functions, finite and trending to zero cases of eigenfunctions

考虑到桨扇升力面和机翼升力面的特点,在以下条件下可认为 K_l 与机翼核函数的值趋于一致^[13]:①桨叶数为 1、场点和源点远离轮毂、场点和源点径向位置充分接近;②对于旋转的桨叶和固定的机翼间的差别可通过设机翼飞行马赫数等于桨扇基元相对来流马赫数来近似体现.应指出,考虑到两者近似性,这只是作为检验 K_l 推导的正确性,而非精确性的一个方式.图 4 所示很好地验证了这种一致性,图中 J 为进距, N 为叶片数, $Ma_{\text{relative},\rho}$ 表示径向位置 ρ 处的相对马赫数.同时其显示,在相对来流马赫数为 1.078 的径向位置处, K_l 的值出现了如上文所述的沿弦向位置异常跳动.计算表明,相对马赫数越高这种跳动越剧烈, K_l 同样存在这类问题.

1.3 核函数的升力面积分

本文反问题计算中核函数 K_l, K_r 的升力面积分式(8)、式(11)被分解为弦向积分和展向积分分别处理

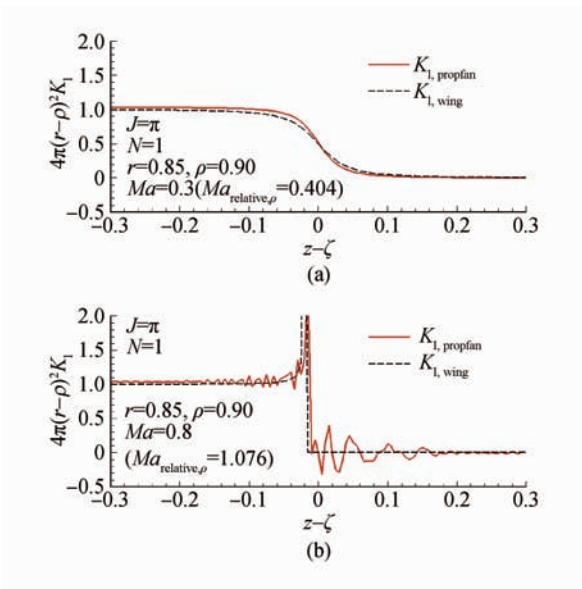


图 4 桨扇的和机翼的载荷-下洗角核函数的比较

Fig. 4 Comparison of the kernel functions of loading-downwash angle of propfan and wing

$$K_{ci,l}(\rho|r,z) = \int_{z_l(\rho)}^{z_t(\rho)} \Delta C_p(\rho,\zeta) K_l(r,z|\rho,\zeta) d\zeta \quad (14)$$

$$K_{ci,t}(\rho|r,z) = \int_{z_l(\rho)}^{z_t(\rho)} S_u(\rho,\zeta) K_t(r,z|\rho,\zeta) d\zeta \quad (15)$$

$$\alpha(r,z) = \int_{r_h}^{r_t} [K_{ci,l}(\rho|r,z) + K_{ci,t}(\rho|r,z)] d\rho \quad (16)$$

弦向积分式(14)、式(15)的积分下限 z_l 和上限 z_t 分别为前缘边和尾缘边的轴向位置. 式中 $K_{ci,l}, K_{ci,t}$ 分别表示核函数 K_l, K_t 的弦向积分; α 是 $K_{ci,l}$ 和 $K_{ci,t}$ 展向积分得到总的下洗角.

核函数的计算精度对下洗角及设计结果桨叶有较大影响,为解决大相对来流马赫数情况中核函数弦向积分的值沿弦向异常跳动的问题,本文采取了解析处理核函数弦向积分的方法. 气动反问题设计中,一般需指定桨叶载荷分布和厚度分布,本文通过给定各基元上弦向载荷分布和厚度分布的解析式,解析处理关于源点的弦向积分式(14)、式(15). 图 5 显示,该方式得到的核函数 K_l 的弦向积分 $K_{ci,l}$ 对于场点弦向位置充分光滑. 计算又表明,核函数 K_t 的弦向积分 $K_{ci,t}$ 在该处理后仍存在上述问题,故本文在大飞行马赫数、大径向位置的 $K_{ci,t}$ 计算中,先对 K_t 进行关于场点弦向位置的积分平均的解析处理

$$K_{t,ave}(r,z|\rho,\zeta) = \frac{1}{2\Delta z} \int_{z-\Delta z}^{z+\Delta z} K_t(r,z|\rho,\zeta) dz \quad (17)$$

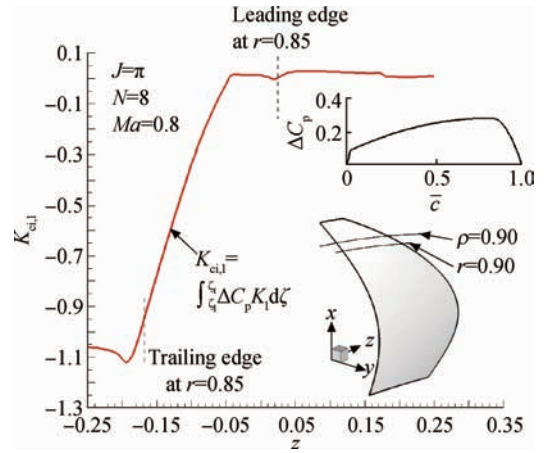


图 5 载荷-下洗角核函数的升力面弦向积分

Fig. 5 Chordwise integral of the kernel function of loading-downwash angle on the lifting surface

展向积分中,核函数 K_l 中的 $K_{l,l}$ 部分在 $r \rightarrow \rho$ 时存在 2 阶奇异性,本文和机翼理论中的展向积分一样,把积分区间分为非奇异区间和奇异区间(图 6). 非奇异区间中径向积分通过复化梯形公式求解. 奇异区间中的非奇异部分也采用该方式,奇异区间中的奇异项积分则根据“无限积分的有限部分”的概念采用文献[15]的方法计算. 值得注意,奇异区间的宽度对积分结果的影响非常显著,这由靠近奇异点侧梯形公式的误差所引起. 计算表明梯形公式中结点宽度取 1% 桨尖半径时,奇异区间宽度取 6% 就可正确收敛.

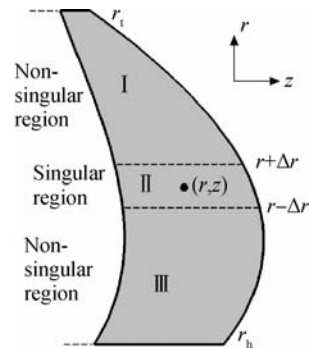


图 6 核函数升力面展向积分中非奇异区间和奇异区间

Fig. 6 Division of the non-singular and singular regions in spanwise integral of the kernels function on the lifting surface

2 桨扇气动反问题设计

2.1 反问题设计分布参数给定

本文反问题设计流程和传统的螺旋桨升力面

法的类似,即先给定载荷分布,给定桨叶在螺旋面上积叠线的形状,给定弦长分布、厚度分布、基元对称叶型,再求解位于螺旋面上的点源和压力偶极子诱导的下洗速度,再根据切向条件确定桨叶中弧面,最后叠加基元叶型得到桨叶造型。

高亚声速巡航的桨扇,桨叶积叠线通常采用大后掠角的设计,本文后掠角的选择是使各截面相对来流有效马赫数不超过一般高速翼型的临界

$$P = N \int_{r_h}^{r_t} \frac{1}{2} \rho_0 W_{0,rel}^2 \int_0^1 \Delta C_p(r, \bar{c}) d\bar{c} \cdot c(r) \frac{U}{W_{0,rel}} \omega r dr + N \int_{r_h}^{r_t} \frac{1}{2} \rho_0 W_{0,rel}^2 \int_0^1 \Delta C_p(r, \bar{c}) d\bar{c} \cdot c(r) \tan \vartheta \frac{\omega r}{W_{0,rel}} \omega r dr + N \int_{r_h}^{r_t} \frac{1}{2} \rho_0 W_{0,rel}^2 \int_0^1 \Delta C_p(r, \bar{c}) d\bar{c} \cdot c(r) \epsilon \frac{\omega r}{W_{0,rel}} \omega r dr \quad (18)$$

$$\frac{\Gamma(r_{i+1})}{\Gamma(r_i)} = \frac{f_a(r_{i+1})}{f_a(r_i)} \cdot \frac{f_b(r_{i+1})}{f_b(r_i)} \cdot \frac{f_c(r_{i+1})}{f_c(r_i)} \quad (19)$$

$$\Gamma(r) = \frac{W_{0,rel}^2}{2W_{1,rel} \cos \vartheta} \int_0^1 \Delta C_p(r, \bar{c}) d\bar{c} \cdot c(r) \quad (20)$$

$$f_a(r) = \frac{2}{\pi} \arccos \left\{ \exp \left[- \frac{N[1 - (J/\pi)(\omega r/U)] \sqrt{1 + (J/\pi)^2}}{2(J/\pi)} \right] \right\} \quad (21)$$

$$f_b(r) = \tau - \epsilon(\omega r/U) \quad (22)$$

$$f_c(r) = \frac{(\omega r/U)^2}{1 + (\omega r/U)^2} \quad (23)$$

$$\begin{cases} W_{0,rel} = \sqrt{U^2 + (\omega r)^2} \\ W_{1,rel} = \sqrt{(U + v')^2 + [(\omega - \omega')r]^2} \\ \tau = \frac{\omega}{\omega - 2\omega'} \left(\frac{2\omega'}{\omega} + \frac{2v'}{U} \right) \end{cases} \quad (24)$$

式(18)给出了弦长分布、载荷系数分布与功率 P 的关系,式(19)、式(20)给出了载荷系数分布满足最佳分布的条件,式(22)、式(23)分别为考虑有限桨叶数桨尖绕流和黏性阻力影响后对最佳分布的修正项.式(19)中 r 的下标代表不同的径向位置.式(20)中 $\Gamma(r)$ 为桨叶径向 r 处基元环量, $W_{0,rel}$ 和 $W_{1,rel}$ 分别为远前方和诱导后的相对来流速度, ϑ 为两者间夹角, $\bar{c}$ 为相对弦长.式(22)中 ϵ 为基元叶型的摩擦因数与升力系数之比, τ 为尾涡面轴向速度与远前方来流速度之比.式(24)中 v' 和 ω' 分别为桨盘处桨叶激起的轴向速度和角速度,可通过理想螺旋桨激盘理论得到。

应注意到对于桨叶载荷的弦向分布 $\Delta C_p(r, \bar{c})$,考虑到本文设计方法的线性化假设,给定的弦向载荷系数分布应不包括可由前缘涡引起的非线性涡升力.这是本文方法的一个限制,但它在巡航点的桨叶设计中应是合理的。

2.2 流动损失对下洗角的修正模型

和文献[5-14]中的基于可压升力面理论的解析化方法一样,本文桨叶和轮毂边界层之外的流

马赫数.本文基元对称叶型的选择,采用了厚度较薄、最大厚度相对位置靠后的高速叶型.桨叶弦长分布和载荷系数分布的给定应满足功率指标,同时,本文载荷系数分布还考虑了 Betz 最佳分布条件.当然,该最佳分布条件是在轻载荷的理想螺旋桨模型下得到的,应用于重载荷的桨扇推进器只是一种近似.载荷系数分布由方程组(式(18)~式(24))联立给出。

动区域中采用的小扰动线性化控制方程中没有引入损失项.对于黏性和激波产生的流动损失在叶片反问题设计中的主要影响,一方面把气流的机械能耗散为热能,影响压力势能和动能间的转化;另一方面叶片附面层的存在及增长会改变气流的出气角,从而影响叶片做功能力。

本文构造了一种反问题设计中的流动损失模型来考虑上述影响.旋转坐标系下沿远前方未受扰动流线的考虑了沿程损失的伯努利方程,其小扰动简化后可表示为

$$\frac{k}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho_0} + \mathbf{W}_0 \cdot \mathbf{w} + L_f = 0 \quad (25)$$

其中假设未受扰动流线位于圆柱面上, k 为多变指数, L_f 为考虑黏性及激波影响后的沿程损失, $\mathbf{W}_0, \mathbf{w}$ 分别为旋转坐标系中远前方未受扰动速度和小扰动速度矢量.本文设想,为使有黏情况下沿流线扰动速度的变化和无黏理想情况下的一样,在基于无黏假设的反问题设计中,沿流线耗散掉的机械能应被追加到扰动压力中

$$p_m = p + \rho_0 \frac{k-1}{k} L_f \quad (26)$$

把式(26)代入式(6),整理后可得

$$\alpha_{1,m} = \alpha_1 + \frac{-1}{U^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 r^2}} \cdot \frac{k-1}{k} \int_{+\infty}^z \frac{\partial L_f}{\partial n} dz \quad (27)$$

式中 p_m 和 $\alpha_{1,m}$ 即为考虑流动损失影响修正后的扰动压力和下洗角.沿程损失的法向梯度项 $\partial L_f / \partial n$ 本文近似处理为

$$\frac{\partial L_f}{\partial n} \approx \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{2 \Delta p_{rel}^*}{t} \tag{28}$$

式中 t 为栅距, Δp_{rel}^* 为基元桨叶通道中平均相对总压损失. Δp_{rel}^* 的值可通过插值得到, 其进口值为零, 出口值为 $\Delta p_{rel, out}^*$. 它可表示为

$$\Delta p_{rel, out}^* = \bar{\omega}_{loss} (p_{rel, in}^* - p_{in}) \tag{29}$$

式中 $p_{rel, in}^*$ 和 p_{in} 为基元桨叶通道进口平均相对总压和静压. 类似于风扇、压气机设计问题, 这里损失系数 $\bar{\omega}_{loss}$ 的选取也应基于大量实验, 但目前缺乏相应实验研究, 暂取 $\bar{\omega}_{loss}$ 沿展向均为 0.05.

3 桨扇气动设计算例

以某桨扇实验件设计算例并结合 CFD 来检验本气动反问题设计方法的准确性.

3.1 设计参数给定

本桨扇气动设计算例的尺寸和设计点参数的选取参照了 United Technologies 公司的 SR-3 桨扇模型^[16], 桨叶数为 8, 桨尖直径为 0.622 m, 轮毂直径为 0.144 m, 设计巡航马赫数为 0.8, 巡航高度为 11 km, 相对进距为 3.14, 即转速为 7 246 r/min, 桨尖线速为 236.1 m/s, 功率为 90 kW, 即桨盘载荷为 232.6 kW/m², 功率系数为 1.504.

对于巡航马赫数为 0.8 的桨扇, 本文给出了螺旋面上积叠线形状, 其在 r - z 平面上的投影见图 7, 后掠角 χ 在桨尖处 41.5°. 给定的桨叶弦长分布见图 8 中 c/D , 其中 D 为桨盘直径, φ_p 为桨距角, $\varphi_{p, 0.75}$ 为 75% 径向处基元的桨距角. 桨根处叶栅稠度为 1.82, 桨尖处为 0.2. 整个叶高均采用 NACA65 系列对称叶型, 桨叶最大厚度分布见图 8 中 t/c . 因指出, 该厚度分布还未从结构强度方面检验, 但不影响对设计方法的检验.

基元载荷 $\int_0^1 \Delta C_p(r, \bar{c}) d\bar{c} \cdot c(r)$ 的径向分布通过式(18)~式(24)确定, 而载荷系数 $\Delta C_p(r, \bar{c})$ 的弦向分布根据经验确定, 如大径向位置处相对流速高, 为减小激波造成的损失采用了后加载型的分布. 图 9 为由此确定的几个基元处的载荷系数分布, 其根部载荷小, 而桨尖处由于绕流的存在载荷取为零. 图 10 为此载荷系数分布对应的基元功率系数 $dC_p/d(r/r_t)$ 、基元拉力系数 $dC_l/d(r/r_t)$ 的分布, 其对应的不包括黏性阻力理想情况下的基元推进效率 $d\eta_p/d(r/r_t)$ 从桨根到桨尖均为 0.856.

值得注意, 上述方式给定载荷系数分布时, 各基元载荷系数不宜过大, 否则相应的叶型弯角过大, 容易产生强的激波而增大损失, 此时可增加基

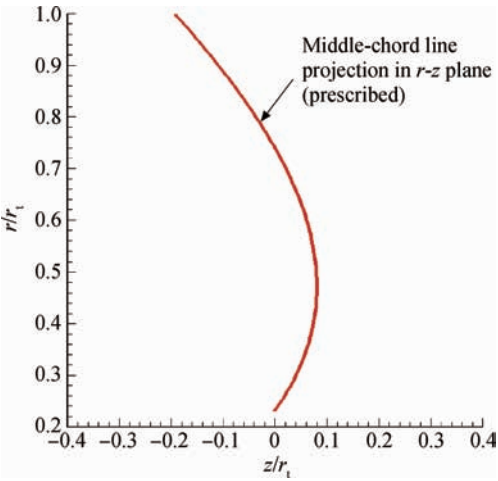


图 7 反问题给定的积叠线
Fig. 7 Prescribed stacking line for inverse approach

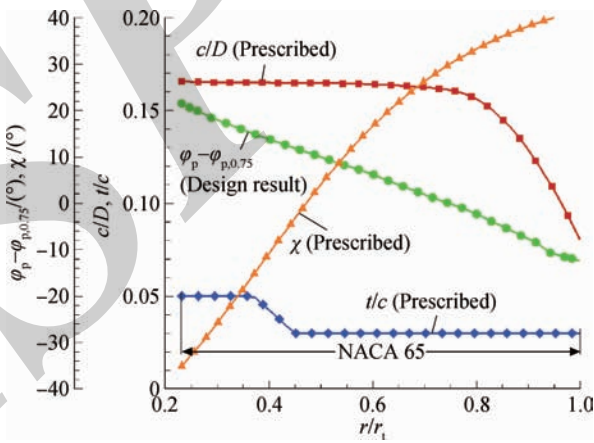


图 8 反问题给定的桨叶厚度分布、弦长分布
Fig. 8 Prescribed blade thickness distribution and chord length distribution for inverse approach

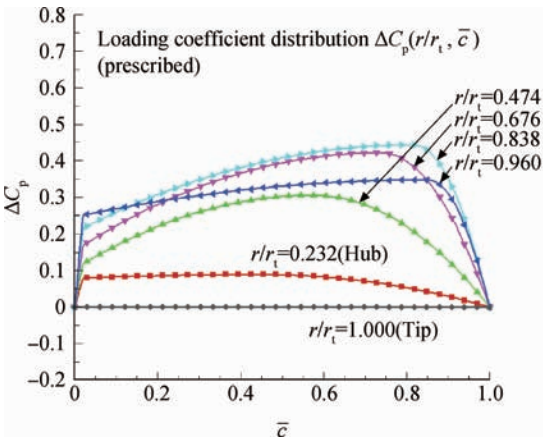


图 9 反问题给定的桨叶载荷系数分布
Fig. 9 Prescribed blade loading coefficient distribution for inverse approach

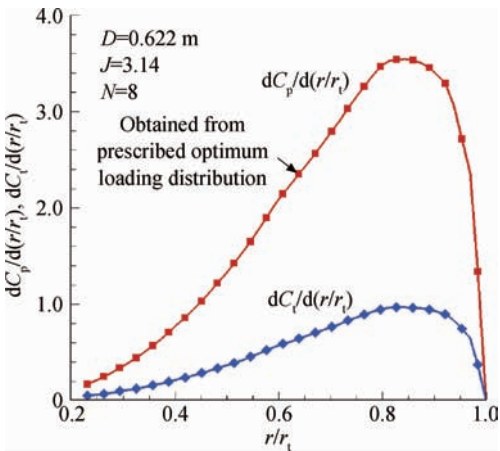


图 10 反问题得出的基元功率系数和基元拉力系数分布
Fig. 10 Distribution of the element power coefficient and element lift coefficient in inverse approach

元弦长来减小基元最大载荷系数。同时,根据前面所述,在给定前缘附近的载荷系数分布时,应不包括可由涡升力导致的远大于势流中载荷系数的非线性情况。

图 11 为根据上述给定的设计参数通过升力面积分得到的螺旋面上控制点的下洗角 α 。桨叶中弧面则根据控制点下洗角及流动切向条件得到,桨叶几何见图 12。桨叶各基元叶型的桨距角见图 8 中的 $\varphi_p - \varphi_{p,0.75}$,反问题设计得到的 $\varphi_{p,0.75}$ 为 58.1° 。

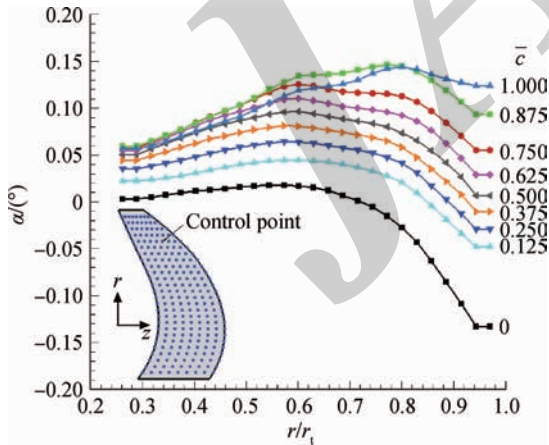


图 11 升力面积分得到的控制点下洗角
Fig. 11 Downwash angle in control points obtaining from the integral on the lifting surface

3.2 三维黏性流场数值模拟

通过三维黏性流场的 RANS(Reynolds-averaged Navier-Stokes)数值模拟来初步检验上述桨扇气动设计方法的可靠性。不同于风扇、压气机内流的数值模拟,桨扇没有外机匣限制,其数值模拟

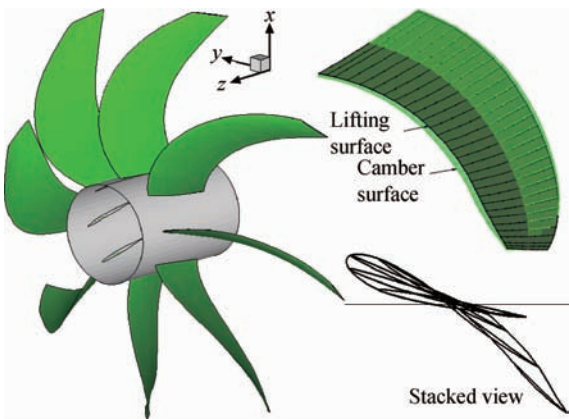


图 12 桨叶中弧面及桨扇造型
Fig. 12 Geometry of camber surface of blade and the propfan

中计算区域尺寸选取若不合理,对计算精度有较大影响。本文单转子桨扇的计算区域尺寸选取参考了文献[16-17],远前方边界和远后方边界到桨盘的距离为 10 倍桨尖半径,径向远场边界处的半径选为 6 倍桨尖半径。文献[16]的研究表明,当径向远场边界采用自由流边界条件时,其半径为 3.62 倍桨尖半径时对高速巡航状态桨扇的计算结果影响已很小。边界条件如图 13 所示,远前方采用亚声速入流边界条件,给定总温、总压和流动方向,远后方采用亚声速出流无反射边界条件,通过径向平衡方程给定静压,径向远场边界采用自由流边界条件,周向边界采用周期性边界条件,桨叶和轮毂采用黏性壁面条件。为与本文方法中的直筒型轮毂相一致,将轮毂黏性段从桨盘前取至桨盘后,黏性延长段继续取至计算域出口,无黏段从桨盘前取至计算域进口。整个流动区域在旋转坐标系下求解,对于本文单转子桨扇问题,全计算域

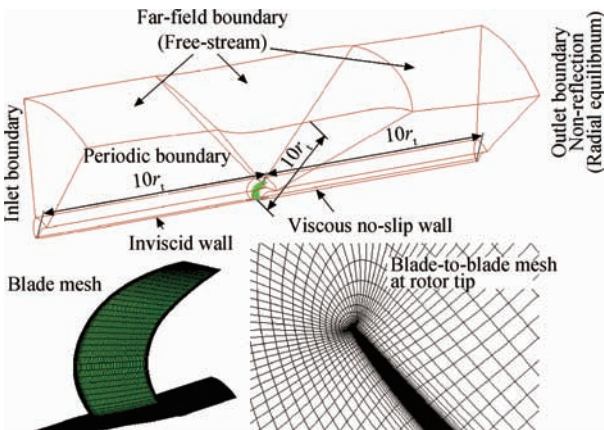


图 13 计算域拓扑、边界条件及网格
Fig. 13 Topology of computational domain, boundary conditions and mesh

内没有转静交界面. 计算域采用单通道, 多块结构化网格, 各块间拓扑如图 13 所示, 总网格数经无关性检验后选为约 360 万, 壁面 y^+ 约为 1.5. 采用 S-A(Spalart-Allmaras)湍流模型.

图 14 为数值模拟得到的 S_1 流面相对马赫数和等 z 面上的涡量. 前缘附近流线显示, 该桨扇在设计点工况中没有形成前缘涡, 而相反在大径向位置处, 相对来流稍冲向吸力面(SS), 来流攻角非常小或为负, 气流绕前缘附近压力面(PS)加速程度大于吸力面, 前缘附近载荷为负.

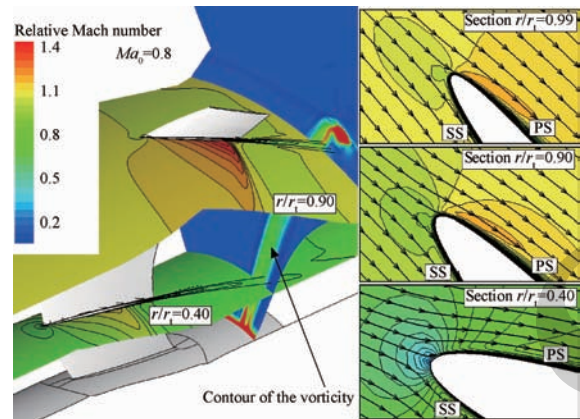


图 14 前缘附近流线、 S_1 流面相对马赫数云图和桨盘后横截面涡量云图
Fig. 14 Streamlines near the leading edge, relative Mach number contours on S_1 stream surfaces and vorticity contours on axial cross section after propfan disk

模拟得到的该桨扇设计点性能为, 高度为 11 km, 巡航马赫数为 0.8, 相对进距为 3.14, 推力为 280.0 N, 扭矩为 116.0 N·m, 功率为 88.0 kW, 功率系数为 1.471, 拉力系数为 0.352, 推进效率为 0.751, 其中, 推力和扭矩是通过桨叶表面和轮毂黏性段表面的压力和摩擦力直接积分得到.

3.3 反问题设计方法的误差分析

图 15、图 16 给出了反问题给定的载荷系数分布、基元功率系数分布与数值模拟所得结果的比较. 图 15 显示, 给定的载荷分布与数值模拟的在弦向分布上有一定差异, 其特点是, 尤其在大径向位置处, 半弦长之前的载荷值小于反问题给定值, 在近前缘附近甚至为负, 而在半弦长之后的载荷大于给定值. 图 16 显示, 给定的基元功率系数分布即 Betz 最佳分布与数值模拟的较一致, 大部分基元上, 基元功率系数小于其给定值, 且它们之比 $\gamma = \frac{dC_p/d(r/r_1)_{\text{calculated}}}{dC_p/d(r/r_1)_{\text{prescribed}}}$ 基本为一定

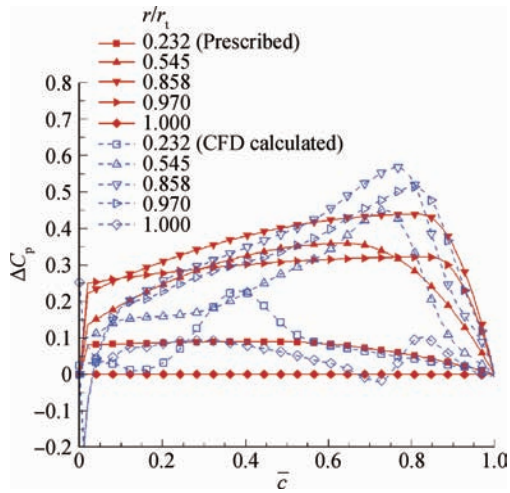


图 15 反问题给定的载荷系数分布与数值模拟结果的比较 ($Ma_0 = 0.8$)
Fig. 15 Comparison of prescribed loading coefficient distribution for inverse approach and that yielding by numerical simulation ($Ma_0 = 0.8$)

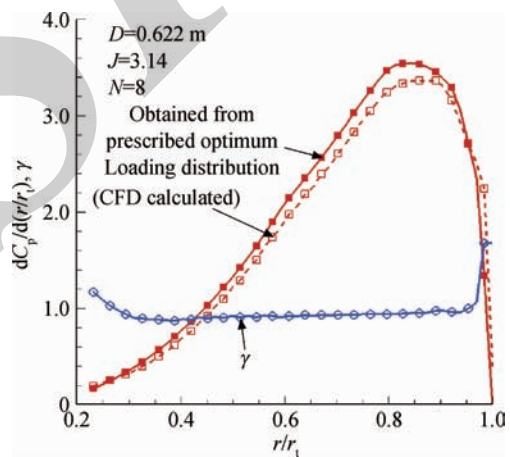


图 16 反问题得出的基元功率系数分布与数值模拟结果的比较 ($Ma_0 = 0.8$)
Fig. 16 Comparison of the element power coefficient distribution for inverse approach and that yielding by numerical simulation ($Ma_0 = 0.8$)

值, 说明该反问题设计结果桨叶较好地实现了 Betz 最佳分布.

为分析反问题给定的载荷分布与 CFD 模拟的载荷分布之间存在差异的原因, 本文进一步设计了巡航马赫数 $Ma_0 = 0.75$ 和 0.7 的两个算例. 两算例中相对进距、积叠线形状、弦长分布、厚度分布、功率系数、载荷分布和对称叶型等所有反问题给定参数均与巡航马赫数 $Ma_0 = 0.8$ 算例的相同. 图 17 为两设计算例的 CFD 模拟的载荷分布. 巡航马赫数 $Ma_0 = 0.70, 0.75$ 设计算例的桨扇推

进效率为 0.771 和 0.777,图 18 为 3 个算例中桨叶 S_1 流面相对马赫数云图. 明显看到,巡航马赫数低的算例的弦向载荷分布的模拟解与其反问题给定的之间的差异小于巡航马赫数高的,故可认为该类差异主要是由本设计方法线性化假设与基元跨声速流动时的非线性的差异所引起. 前缘附近的载荷分布与给定的之间仍存在较明显差异的原因,可能在于给定分布的合理性尚待考究. 图 17(b)显示,大径向位置处基元的载荷分布中,最大载荷点相对位置较给定的更靠前,这可能是由给定的对称叶型与给定的弦向载荷分布不匹配所引起. 当然,前文提到的该可压升力面理论中的近似性也是这里引起差异的原因. 图 19 显示,巡航马赫数 $Ma_0=0.75$ 和 0.7 的设计算例中,模拟解

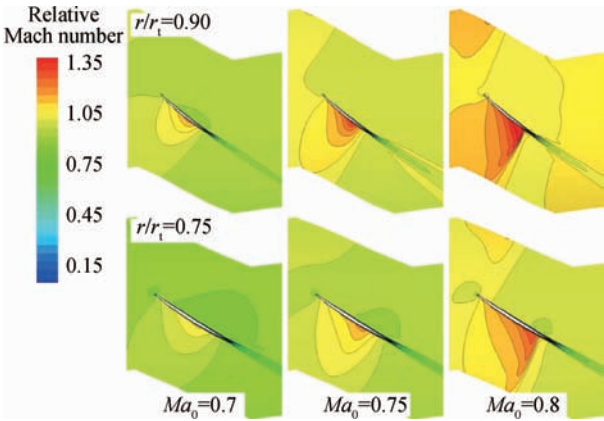


图 18 不同巡航马赫数算例中的 S_1 流面相对马赫数云图
Fig. 18 Relative Mach number contours on S_1 stream surfaces in different cruising Mach number design examples

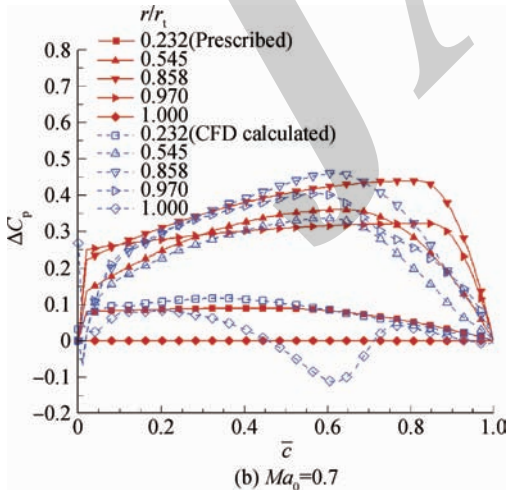
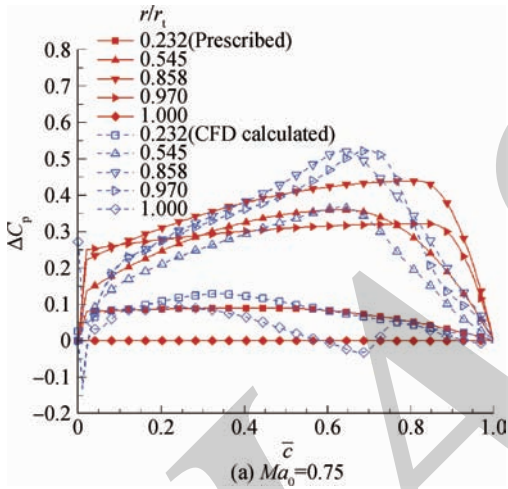


图 17 不同巡航马赫数设计算例中反问题给定的载荷系数分布与数值模拟的差异
Fig. 17 Differences between the prescribed loading coefficient distribution for inverse approach and that yielding by numerical simulation in different cruising Mach number design examples

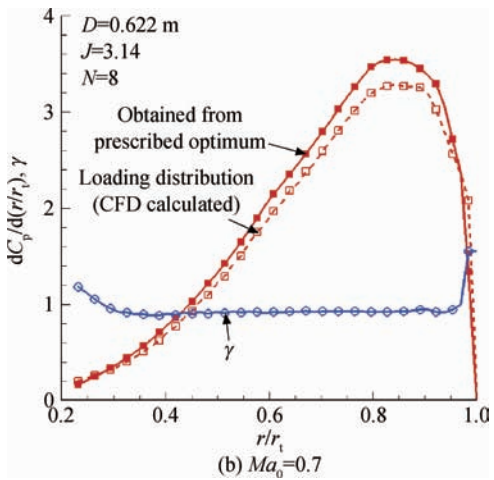
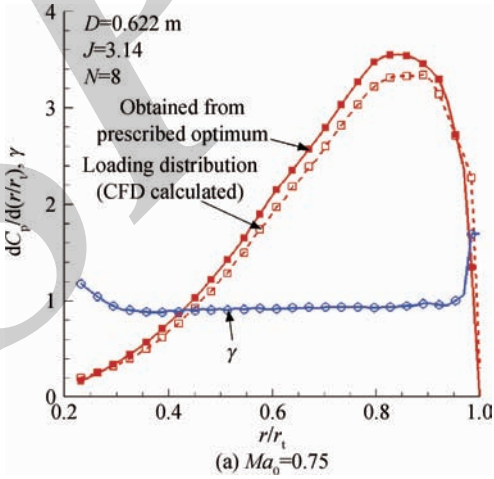


图 19 不同巡航马赫数设计算例中反问题得出的基元功率系数分布与数值模拟的差异
Fig. 19 Differences between the prescribed element power coefficient distribution for inverse approach and that yielding by numerical simulation in different cruising Mach number design examples

的基元功率系数分布与给定的 Betz 最佳分布条件得到基元功率系数分布较吻合。

4 结 论

研究了一种桨扇气动设计反问题方法,把涵道叶轮机的可压升力面理论推广应用于无涵道桨扇气动设计,相比于传统螺旋桨升力面设计方法,其在旋转坐标系、可压缩流的小扰动线性化假设下严格处理了桨叶旋转、流动压缩性、宽弦大后掠桨叶和桨叶间相互作用,体现了桨扇有轮毂而无机匣的特征。给出了桨扇设计中载荷-下洗角、厚度-下洗角核函数表达式,介绍了其在升力面弦向和展向积分中的处理方式,讨论了反问题设计中各设计给定参数的给定方式,构造了一种修正反问题设计中流动损失影响的损失模型,给出了具体设计算例,结合数值模拟分析了该设计方法的准确性。研究表明:

1) 本文桨扇核函数计算量大于涵道叶轮机,一方面由于桨扇叶片数少,而核函数计算量与叶片数成反比;另一方面,由于桨扇问题中核函数的轴向非衰减模态对应的波数范围大于涵道叶轮机问题的。

2) 升力面弦向积分中,本文解析的处理方式可以有效解决大相对来流马赫数情况下核函数值沿弦向位置异常振荡的问题。

3) 反问题设计中给定的最佳载荷分布对于高速、重载荷的桨扇只是一种近似,通过对给定的积叠线形状、弦长分布、弦向载荷分布和叶型等的优化,应可进一步提高桨扇推进效率。实际应用中这些参数的优化还应考虑结构强度、噪声等因素。

4) 在跨声速区,数值模拟的弦向载荷分布与反问题给定的存在一定差异,这主要由本设计方法线性化假设与跨声速流动非线性的差别所造成。数值模拟的基元功率系数分布与反问题给定的 Betz 最佳分布、设计结果桨扇的总体性能参数与设计目标均吻合较好。

参考文献:

[1] SMITH L H. Unducted fan aerodynamic design[J]. Journal of Turbomachinery, 1987, 109(3): 313-324.
[2] MILESHIN V I, NYUKHTIKOV M A, OREKHOV I K, et al. Open counter rotating fan blades optimization based

on 3D inverse problem Navier-Stokes solution method with the aim of tonal noise reduction [R]. ASME Paper GT2008-51173, 2008.
[3] ADKINS C N, LIEBECK R H. Design of optimum propellers [J]. Journal of Propulsion and Power, 1994, 10(5): 676-682.
[4] PLAYLE S C, KORKAN K D, LAVANTE E V. A numerical method for the design and analysis of counter-rotating propellers[J]. Journal of Propulsion and Power, 1986, 2(1): 57-63.
[5] ROHRBACH C. A report on the aerodynamic design and wind tunnel test of a prop-fan model [R]. AIAA 76-667, 1976.
[6] HANSON D B. Compressible helicoidal surface theory for propeller aerodynamics and noise[J]. AIAA Journal, 1983, 21(6): 881-889.
[7] LORDI J A, HOMICZ G F. Linearized analysis of the three-dimensional compressible flow through a rotating annular blade row[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1981, 103: 413-442.
[8] CHO J, WILLIAMS M H. Counter rotating propeller analysis using a frequency domain panel method[J]. Journal of Propulsion and Power, 1990, 6(4): 426-433.
[9] WILLIAMS M H. An unsteady lifting surface method for single rotation propellers[R]. NASA CR-4302, 1990.
[10] SCHULTEN J B H M. Sound generation by ducted fans and propellers as a lifting surface problem[D]. Enschede, Netherlands: University of Twente, 1993.
[11] CUNNINGHAM H J. Improved numerical procedure for harmonically deforming lifting surfaces from the supersonic kernel function method[J]. AIAA Journal, 1966, 4(11): 1961-1968.
[12] NAMBA M. Lifting surface theory for a rotating subsonic or transonic blade row[R]. ARC R&M 3740, 1974.
[13] HANSON D B. Compressible lifting surface theory for propeller performance calculation[J]. Journal of Aircraft, 1985, 22(1): 19-27.
[14] ROBINSON A, LAURMANN J A. Wing theory [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1956.
[15] ROHRBACH C, METZGER F B, BLACK D M, et al. Evaluation of wind tunnel performance testings of an advanced 45 swept eight-bladed propeller at Mach numbers from 0.45 to 0.85[R]. NASA CR-3505, 1982.
[16] ZACHARIADIS A, HALL C A. Application of a Navier-Stokes solver to the study of open rotor aerodynamics[J]. Journal of Turbomachinery, 2011, 133(3): 031025. 1-031025. 11.
[17] GHENALET A, HALIMI A. Aerodynamic characterization of a high speed propeller [R]. ASME Paper GT2014-25765, 2014.

附录 A

来流亚声速 ($Ma < 1$) 情况中, 体现 N 个桨叶作用的半有限空间基本解 G_c .

$$G_c(r, \theta, z | \rho, \varphi, \zeta) = \sum_{m=0}^{N-1} G\left(r, \theta, z | \rho, \varphi + 2\pi \frac{m}{N}, \zeta\right) =$$

$$\frac{-N}{4\pi\beta^2} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^{+\infty} \left\{ R_l^{(\nu N)}(\rho) R_l^{(\nu N)}(r) \cdot \exp\left[i\nu N(\theta - \varphi) + i \frac{Ma^2 \omega}{\beta^2} \nu N(z - \zeta)\right] \cdot \frac{\exp(-\Omega_l^{(\nu N)} |z - \zeta|)}{\Omega_l^{(\nu N)}} \right\} \quad (A1)$$

$$\Omega_l^{(\nu N)} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\beta^2} [(k_l^{(\nu N)})^2 - Ma^2 \omega^2 \nu^2 N^2 / \beta^2]}, & (k_l^{(\nu N)})^2 - Ma^2 \omega^2 \nu^2 N^2 / \beta^2 > 0 \\ -i \operatorname{sgn}(\omega \nu) \sqrt{\frac{1}{\beta^2} [Ma^2 \omega^2 \nu^2 N^2 / \beta^2 - (k_l^{(\nu N)})^2]}, & (k_l^{(\nu N)})^2 - Ma^2 \omega^2 \nu^2 N^2 / \beta^2 < 0 \end{cases} \quad (A2)$$

其中 $\beta = \sqrt{1 - Ma^2}$.

本文特征值 $k_l^{(n)}$ 通过式 (A3) 的零点确定

$$f(k_l^{(n)}) = J'_{|n|}(k_l^{(n)} r_h) Y'_{|n|}(k_l^{(n)} r_\infty) - J'_{|n|}(k_l^{(n)} r_\infty) Y'_{|n|}(k_l^{(n)} r_h) \quad (A3)$$

特征函数 $R_l^{(n)}(r)$ 通过式 (A4) 确定

$$\left. \begin{aligned} Z(k_l^{(n)} r) &= Y'_{|n|}(k_l^{(n)} r_h) J_{|n|}(k_l^{(n)} r) - J'_{|n|}(k_l^{(n)} r_h) Y_{|n|}(k_l^{(n)} r) \\ (N_l^{(n)})^2 &= \frac{1}{2} \{ [r^2 - n^2 / (k_l^{(n)})^2] Z^2(k_l^{(n)} r) + r^2 Z'^2(k_l^{(n)} r) \}_{r_h}^\infty \\ R_l^{(n)}(r) &= Z(k_l^{(n)} r) / N_l^{(n)} \end{aligned} \right\} \quad (A4)$$

其中的 J_n 和 Y_n 为第 1 类和第 2 类 n 阶 Bessel 函数.

附录 B

桨扇载荷-下洗角核函数 $K_l(r, \theta, z | \rho, \zeta)$

$$K_1(r, \theta, z | \rho, \zeta) = K_{1,1}(r, \theta, z | \rho, \zeta) + K_{2,1}(r, \theta, z | \rho, \zeta) + K_{3,1}(r, \theta, z | \rho, \zeta) + K_{4,1}(r, \theta, z | \rho, \zeta) \quad (B1)$$

$$K_{1,1}(r, \theta, z | \rho, \zeta) = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{\nu=1}^{+\infty} 2f_{1,l}^{(\nu N)} \cos(\nu N \theta_0) \quad (B2)$$

$$K_{2,1}(r, \theta, z | \rho, \zeta) = \sum_{l=1}^{+\infty} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\nu l} -2f_{2,l}^{(\nu N)} \frac{1}{\hat{\Omega}_l^{(\nu N)}} \cdot \exp(-\nu N \hat{\Omega}_l^{(\nu N)} |z - \zeta|) \sin\left\{ \nu N \left[\theta_0 + \frac{\omega}{\beta^2} (z - \zeta) \right] \right\} + \right.$$

$$\left. \sum_{\nu=\nu l+1}^{+\infty} 2f_{2,l}^{(\nu N)} \frac{1}{-\operatorname{sgn}(\omega) \hat{\Omega}_l^{(\nu N)}} \cos\left\{ \nu N \left[\theta_0 + \frac{\omega}{\beta^2} (z - \zeta) + \operatorname{sgn}(\omega) \hat{\Omega}_l^{(\nu N)} |z - \zeta| \right] \right\} \right\} \quad (B3)$$

$$K_{3,1}(r, \theta, z | \rho, \zeta) = \sum_{l=1}^{+\infty} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\nu l} 2f_{3,l}^{(\nu N)} \cdot \exp(-\nu N \hat{\Omega}_l^{(\nu N)} |z - \zeta|) \cdot \cos\left\{ \nu N \left[\theta_0 + \frac{\omega}{\beta^2} (z - \zeta) \right] \right\} + \right.$$

$$\left. \sum_{\nu=\nu l+1}^{+\infty} 2f_{3,l}^{(\nu N)} \cos\left\{ \nu N \left[\theta_0 + \frac{\omega}{\beta^2} (z - \zeta) + \operatorname{sgn}(\omega) \hat{\Omega}_l^{(\nu N)} |z - \zeta| \right] \right\} \right\} \quad (B4)$$

$$K_{4,1}(r, \theta, z | \rho, \zeta) = \sum_{l=1}^{+\infty} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\nu l} 2f_{4,l}^{(\nu N)} [-\operatorname{sgn}(z - \zeta) \omega \rho] \exp(-\nu N \hat{\Omega}_l^{(\nu N)} |z - \zeta|) \cos\left\{ \nu N \left[\theta_0 + \frac{\omega}{\beta^2} (z - \zeta) \right] \right\} + \right.$$

$$\sum_{\nu=1}^{\nu l} -2f_{4,l}^{(\nu N)} \frac{\left(-\frac{1}{\rho} + \frac{Ma^2 \omega^2 \rho}{\beta^2} \right)}{\hat{\Omega}_l^{(\nu N)}} \exp(-\nu N \hat{\Omega}_l^{(\nu N)} |z - \zeta|) \sin\left\{ \nu N \left[\theta_0 + \frac{\omega}{\beta^2} (z - \zeta) \right] \right\} +$$

$$\sum_{\nu=\nu l+1}^{+\infty} 2f_{4,l}^{(\nu N)} \left[\frac{-\frac{1}{\rho} + \frac{Ma^2 \omega^2 \rho}{\beta^2}}{-\operatorname{sgn}(\omega) \hat{\Omega}_l^{(\nu N)}} - \operatorname{sgn}(z - \zeta) \omega \rho \right] \cos\left\{ \nu N \left[\theta_0 + \frac{\omega}{\beta^2} (z - \zeta) + \operatorname{sgn}(\omega) \hat{\Omega}_l^{(\nu N)} |z - \zeta| \right] \right\} +$$

$$f_{4,l}^{(0)} [-\operatorname{sgn}(z - \zeta) \omega \rho] \exp(-\Omega_l^{(0)} |z - \zeta|) \} \quad (B5)$$

其中

$$\hat{\Omega}_l^{(\nu N)} = \sqrt{\left| \frac{1}{\beta^2} [(\kappa_l^{(\nu N)})^2 - Ma^2 \omega^2 / \beta^2] \right|} \tag{B6}$$

$$\kappa_l^{(\nu N)} = k_l^{(\nu N)} / |\nu N| \tag{B7}$$

$$f_{1,l}^{(\nu N)} = -\frac{\sqrt{1 + \omega^2 \rho^2}}{2(1 + \omega^2 r^2)} \cdot \frac{-N}{4\pi\beta^2} R_l^{(\nu N)}(\rho) R_l^{(\nu N)}(r) \left(\frac{1}{r} + \omega^2 r \right) \left(\frac{1}{\rho} + \omega^2 \rho \right) \frac{[1 - \text{sgn}(z - \zeta)]}{\left[\frac{\omega^2}{\beta^2} + \frac{(\kappa_l^{(\nu N)})^2}{\beta^2} \right]} \tag{B8}$$

$$f_{2,l}^{(\nu N)} = -\frac{\sqrt{1 + \omega^2 \rho^2}}{2(1 + \omega^2 r^2)} \cdot \frac{-N}{4\pi\beta^2} R_l^{(\nu N)}(\rho) R_l^{(\nu N)}(r) \left(\frac{1}{r} + \omega^2 r \right) \frac{\left[-\frac{1}{\rho} \frac{\omega}{\beta^2} + \frac{\omega \rho}{\beta^2} (\kappa_l^{(\nu N)})^2 \right]}{\left[\frac{\omega^2}{\beta^2} + \frac{(\kappa_l^{(\nu N)})^2}{\beta^2} \right]} \tag{B9}$$

$$f_{3,l}^{(\nu N)} = -\frac{\sqrt{1 + \omega^2 \rho^2}}{2(1 + \omega^2 r^2)} \cdot \frac{-N}{4\pi\beta^2} R_l^{(\nu N)}(\rho) R_l^{(\nu N)}(r) \left(\frac{1}{r} + \omega^2 r \right) \left(\frac{1}{\rho} + \omega^2 \rho \right) \frac{-\text{sgn}(z - \zeta)}{\left[\frac{\omega^2}{\beta^2} + \frac{(\kappa_l^{(\nu N)})^2}{\beta^2} \right]} \tag{B10}$$

$$f_{4,l}^{(\nu N)} = -\frac{\sqrt{1 + \omega^2 \rho^2}}{2(1 + \omega^2 r^2)} \cdot \frac{-N}{4\pi\beta^2} R_l^{(\nu N)}(\rho) R_l^{(\nu N)}(r) (-\omega r) \tag{B11}$$

式中 νl 为给定的 l 数下,核函数为轴向衰减模态时波数 ν 的最大值(如图 B1).

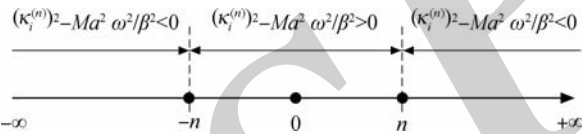


图 B1 给定 l 数下核函数轴向非衰减模态和轴向衰减模态对应的波数 n 范围

Fig. B1 n division of the kernel functions of axial decay and non-decay mode at specified l

桨扇厚度-下洗角核函数 $K_t(r, \theta, z | \rho, \zeta)$

$$\begin{aligned} K_t(r, \theta, z | \rho, \zeta) = & \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{\nu=1}^{\nu l} -2f_l^{(\nu N)} \frac{\left(\frac{1}{r} - \frac{Ma^2 \omega^2 r}{\beta^2} \right)}{\hat{\Omega}_l^{(\nu N)}} \exp(-\nu N \hat{\Omega}_l^{(\nu N)} |z - \zeta|) \sin \left\{ \nu N \left[\theta_0 + \frac{\omega}{\beta^2} (z - \zeta) \right] \right\} + \\ & \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{\nu=1}^{\nu l} 2f_l^{(\nu N)} [\omega r \text{sgn}(z - \zeta)] \exp(-\nu N \hat{\Omega}_l^{(\nu N)} |z - \zeta|) \cos \left\{ \nu N \left[\theta_0 + \frac{\omega}{\beta^2} (z - \zeta) \right] \right\} + \\ & \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{\nu=\nu l+1}^{+\infty} 2f_l^{(\nu N)} \cdot \left[\frac{\frac{1}{r} - \frac{Ma^2 \omega^2 r}{\beta^2}}{-\text{sgn}(\omega) \hat{\Omega}_l^{(\nu N)}} + \omega r \text{sgn}(z - \zeta) \right] \cos \left\{ \nu N \left[\theta_0 + \frac{\omega}{\beta^2} (z - \zeta) + \text{sgn}(\omega) \hat{\Omega}_l^{(\nu N)} |z - \zeta| \right] \right\} + \\ & \sum_{l=1}^{+\infty} f_l^{(0)} [\omega r \text{sgn}(z - \zeta)] \exp(-\Omega_l^{(0)} |z - \zeta|) \end{aligned} \tag{B12}$$

其中

$$f_l^{(\nu N)} = \frac{2}{1 + \omega^2 r^2} \cdot \frac{-N}{4\pi\beta^2} R_l^{(\nu N)}(\rho) R_l^{(\nu N)}(r) \tag{B13}$$